

Конспект урока по дисциплине ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кириченко С.Ю.

Тема: Матрицы. Действия над матрицами

Тип урока: Изучение нового материала.

Вид урока: Комбинированный урок.

Методы урока: Лекция с элементами беседы, создание проблемных ситуаций, выполнение самостоятельных заданий в ходе лекции.

Оснащение урока:

ПК, тетрадь для ведения конспектов.

Цели:

Образовательные: познакомить с понятием матрицы и ее видами, научить выполнять основные операции над матрицами.

Развивающие: Развивать способности к анализу и формировать познавательную потребность.

Воспитательные: прививать навыки самостоятельной работы при изучении новой темы; воспитывать внимательность.

План урока

1. Организационная часть. (5 минут)
2. Сообщение темы и целей урока. (5 минут)
3. Изучение и закрепление нового материала: (45 минут)

Основные сведения о матрицах.

Виды матриц.

Действия над матрицами.

Сложение матриц.

Вычитание матриц.

Умножение матрицы на число.

Умножение матриц.

4. Итог урока.
5. Самостоятельная работа (20 минут)
6. Домашнее задание. (5 минут)

Ход урока:

1.Организационная часть

2. Сообщение темы и цели урока

Тема урока: Матрицы. Действия над матрицами.

Цель: Познакомиться с понятием «матрица», с правилами ее записи, чтения; усвоить правила выполнения действий над матрицами.

Тема урока записывается в тетрадь.

3. Изучение и усвоение нового материала:

3.1. Основные сведения о матрицах

столбцов:

Определение: Матрицей называется таблица чисел (выражений), имеющая m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

В дальнейшем будем писать матрицу в сокращенном виде

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Проводится устный опрос:

Сформулируйте определение матрицы.

Что означают индексы, в каком порядке записываются?

Определение: Если матрица содержит m строк и n столбцов, то она называется матрицей- $m \times n$.

$$C = (c_{ij})_{1 \times n} = (c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{1n})$$

Задачей. Указать размеры матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$M = (1 \ -2 \ 3 \ 7), \quad K = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 4}.$$

$$M = (1 \ -2 \ 3 \ 7)_{1 \times 4}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}_{3 \times 1}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 5}.$$

3.2 Виды матриц

столбцом

Определение: Если матрица содержит m строк и 1 столбец, то она называется матрицей-

$B = (b_{ij})$	$\begin{matrix} i=1 \\ \vdots \\ i=m \end{matrix}$
$=$	$\begin{matrix} j=1 \\ \vdots \\ j=1 \end{matrix}$
$m \times 1$	1×1

Пример:

Следующие таблицы являются матрицами

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4^1 & 3^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4^1 & 3^0 & 5^9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5^3 \end{pmatrix}$$

Определение: Матрица, у которой совпадает количество столбцов с количеством строк, называется квадратной.

Определение: Матрицу, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю равны

нулю, будем называть треугольной

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определение: Матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов,

	P	0	0 ^п
A	0	«2 2	0
	P	0	д ₃₃

стоящих на главной диагонали, называется диагональной

Определение: Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой на главной диагонали все элементы равны единице, а остальные элементы равны

$\begin{matrix} <1 \text{ (N)} \\ \Gamma(2) = 0 \text{ 1} / \Gamma, 31 = \end{matrix}$	$\begin{matrix} p^0 & 0 \\ 0 & ; \\ p^0 & M \end{matrix}$	$\begin{matrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & J \end{matrix}$
--	---	--

нулю:

Задача 2. Даны матрицы. Около каждого названия вида матрицы выпишите обозначения

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Прямоугольные: В, Д, М, К, Р.

Квадратные: А, С, Н.

Матрица-строка: М.

Матрица- столбец: К.

Единичная матрица: Н.

Нуль - матрица: Р.

Устно: назовите элементы главной диагонали квадратных матриц из задачи 3.

Ответ:

Для матрицы А: 2; 5.

Для матрицы С: 4; 1; 2.

Для матрицы Н: 1; 1; 1.

3.3 Действия над матрицами

Преподаватель: «Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые - специфические.

3.3.1- 3.3.2. Сложение (вычитание) матриц

Суммой (разностью) двух матриц $L = (l_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица той же размерности $C = (c_{ij})$, элементы которой вычисляются по формуле:

называется матрица той же размерности $C = (c_{ij})$, элементы которой вычисляются по формуле:

Пример:

Найти сумму (разность) матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение:

Из приведенных матриц складывать (вычитать) можно только матрицы А и С, которые имеют одинаковую структуру. Найдем сумму:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

и разность этих матриц:

$$A - C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 10 \\ -3 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Найдите суммы: $A + B$ и $B + A$, $A + B + C$ и $A + (B + C)$. Сделайте выводы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение :

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+7 & -1+5 \\ 3+2 & 0-3 \\ -5+0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+2 & 5-1 \\ 2+3 & -3+0 \\ 0-5 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вывод: Сложение матриц обладает коммутативным свойством: $A + B = B + A$.

$(A+B)+C$: Сначала найдем сумму $A+B$, к полученной матрице прибавим матрицу C :

$$A + B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-4 & 4+2 \\ 5+3 & -3-5 \\ -5+8 & -1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & -8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$A+(B+C)$: к матрице A прибавим сумму матриц B и C .

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-4 & 5+2 \\ 2+3 & -3-5 \\ 0+8 & 1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Вывод: сложение матриц обладает ассоциативным свойством: $(A+B)+C = A+(B+C)$.

3.3.3 . Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число X называется матрица $D=XA$, элементы которой $d_{ij} = Xa_{ij}$.

Задача 4. Представьте матрицу в виде произведения матрицы на число и сделайте вывод:

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 15 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 1$$

Решение: для того, чтобы выполнить такое представление матрицы, необходимо найти общий множитель всех элементов матрицы, например, число 2, затем разделить каждый элемент на данное число, получим:

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 7.5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Обсуждение и вывод: правило умножения матрицы на число позволяет выполнять вынесение общего множителя всех элементов за знак матрицы.

Что можно сказать о произведении $0 \cdot A$?

Ответ: при умножении матрицы на ноль получается нуль-матрица, т.к. все элементы будут равны нулю: $0 \cdot A = O$

3.3.4 Умножение матриц

Произведением матриц $A = (a_{ij})_{m \times l}$ и $B = (b_{ij})_{l \times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{il} \cdot b_{jl}$$

Замечание: Перемножать можно лишь те матрицы, для которых количество столбцов первой перемножаемой матрицы совпадает с количеством строк второй перемножаемой матрицы. Матрица, получаемая в результате перемножения, имеет количество строк равное количеству строк первой матрицы и количество столбцов равное количеству столбцов второй матрицы.

Пример5: Найти (возможные) произведения матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Матрица A имеет структуру 2×3 , матрица B - 2×2 , матрица C - 3×2 . Согласно определению

$$A \cdot B \text{ и } B \cdot A \text{ существуют. Не существуют}$$

произведения $A \cdot C$ и $C \cdot A$. Прежде всего, определим

структуру результирующей матрицы: имеем размерности 2×3 и 3×2 и убирая подчеркнутые цифры, получим структуру результирующей матрицы 2×2 . Вычислим ее элементы. Для того чтобы найти элементы возможных произведений, надо просуммировать произведения элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы:

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= 2 \cdot (-1) + 9 \cdot 2 = 16; & d_{12} &= 2 \cdot 3 + 9 \cdot (-4) = -30; & d_{13} &= 2 \cdot 8 + 9 \cdot (-6) = -30; \\
 d_{21} &= 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 = -7; & d_{22} &= 3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) = 17; & d_{23} &= 3 \cdot 8 + (-2) \cdot (-6) = 30.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -30 & 70 \\ -7 & 17 & 12 \end{pmatrix}.$

Остальные возможные произведения найти самостоятельно.

Замечание: Из приведенного примера видно, что в общем случае произведение матриц некоммукативно (неперестановочно), т. е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Задача 6. В каком случае существует натуральная степень матрицы A_n и каков размер

итоговой матрицы? Найдите A^2 , где $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; E^2 , где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Что можно сказать о натуральной степени единичной матрицы?

Ответ: A^n существует, если матрица квадратная. Размерность такая же, что и у матрицы A .

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 9 \cdot 3 & 2 \cdot 9 + 9 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 & 3 \cdot 9 + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -5 \\ 0 & 29 \end{pmatrix} \\
 E^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Очевиден вывод: $E^n = E$.

Задача 7. Дана квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и единичная матрица такого же размера. Найдите произведения AE и EA и сделайте вывод.

Решение:

$$\begin{aligned}
 AE &= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 EA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Вывод: $AE = EA = A$ для квадратных матриц, следовательно в таких произведениях единичная матрица играет такую же роль, что и единица при умножении чисел $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Записать в тетрадь:

Свойства умножения матриц:

1. $A(B + C) = AB + AC$;
2. $(A + B)C = AC + BC$;
3. $(\alpha A)B = \alpha(AB)$;
4. $A(BC) = (AB)C$;

Итог урока

Фронтальный опрос.

Вопросы:

1. Сформулируйте определение матрицы.
2. Для чего нужны матрицы?
3. Перечислите виды матриц.
4. Как выполняется сложение матриц?
5. Как выполняется вычитание матриц?
6. Как выполняется умножение матрицы на число?

Как выполняется умножение матриц?

Преподаватель предлагает студентам оценить свою работу на уроке, степень усвоения материала и проверить самостоятельной работой.

5. Самостоятельная работа

Даны матрицы A, B и D. Найти $(3A)$, $(B+D)$, $(B - 2D)$, $(A^T B)$, $(B^T A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1^2 & 5^3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Домашнее задание.

Домашнее задание.

Выполнить письменно.

Произвести действия над данными матрицами, а в случае, когда это невозможно, указать причину: а) $A+B$, б) $3A+C$, в) AB , г) BA , д) AD , е) $B+D$.

Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$